

## Ayudantía

Flujo de Potencia. Máquina Síncrona.

### Problema 1. Flujo de Potencia

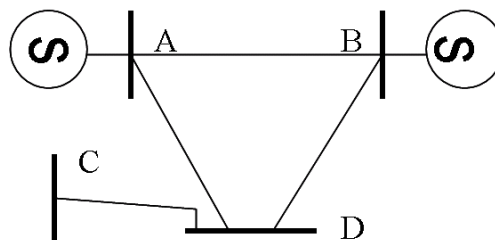
Se representa el diagrama unilineal de un sistema eléctrico de potencia. Se conocen las siguientes condiciones de operación para los generadores  $G_A$  y  $G_B$ : tensiones en bornes  $V_A=1,03$  pu,  $V_B=1,02$  pu,  $P_B=100$  MW,  $Q_B$  no se conoce. La información disponible de consumo en cada barra es:

- Barra A:  $P = 20\text{MW}$ ,  $Q = 5\text{MVar}$
- Barra B:  $P = 30\text{MW}$ ,  $Q = 5\text{MVar}$
- Barra C:  $P = 70\text{MW}$ ,  $Q = 10\text{MVar}$

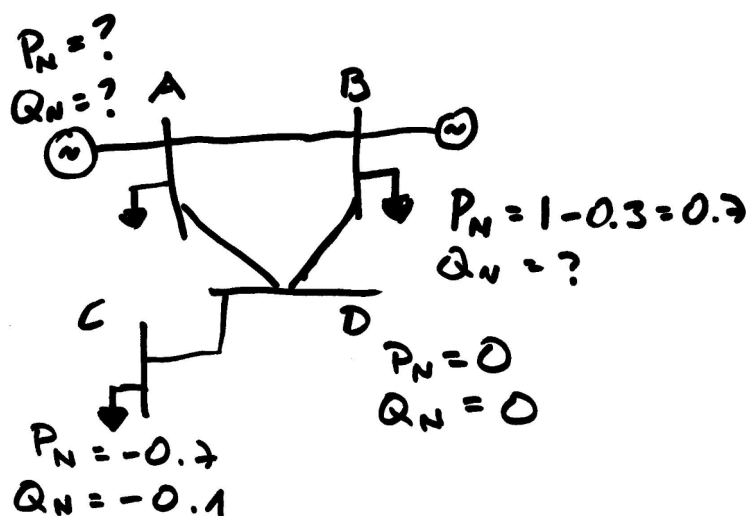
Se provee la siguiente información de la matriz admitancia nodal del sistema (en por unidad, base  $100\text{MVA}$ ):

A	$-j9$	$j5$	0	$j4$
B		$-j10$	0	$j5$
C			$-j10$	$j10$
D				$-j25$

- a) Explique qué característica asignaría a cada barra (ya sea barra PQ, PV ó de referencia) en un estudio de flujo de potencia y ¿por qué?.
- b-c-d) Inicie un estudio de flujo de potencia con el método Gauss-Seidel, calculando los valores de los voltajes de todas las barras para la primera y segunda iteración. Calcule, después de la segunda iteración, la potencia generada en A. Considere como punto de partida tensiones 1 pu en barras donde no se ha especificado y ángulos de fase  $0^\circ$ . Trabaje las barras en el orden A, B, C, D.



**Solución:** a) Consideremos el siguiente esquema:



De aquí es mas claro que tipo de barras usar:

- Barra A: Referencia. Se especifica  $V_a = 1,03$  pero no sabemos la potencia generada por el generador, por lo que desconocemos la potencia neta  $P_n$  y  $Q_n$ . Luego:

$$V_a = 1,03 \angle 0^\circ$$

- Barra B: Tipo PV. Sabemos que  $|V_b| = 1,02$  y que  $P_{neta} = 0,7$ .
- Barra C: Tipo PQ. Sabemos  $P_n = -0,7$  y  $Q_n = -0,1$ .
- Barra D: Tipo PQ. Sabemos  $P_n = 0$  y  $Q_n = 0$ .

b-c-d) Usando la simetría de la matriz admitancia se tiene:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -9j & 5j & 0 & 4j \\ 5j & -10j & 0 & 5j \\ 0 & 0 & -10j & 10j \\ 4j & 5j & 10j & -25j \end{pmatrix}$$

Procedemos a realizar la 1ra iteración fijando  $\theta_b = 0^\circ$  y  $V_c = V_d = 1 \angle 0^\circ$ :

1a iteración	V	$\theta$	$P_n$	$Q_n$
A	1,03	0		
B	1,02	0	0,7	?
C	1	0	-0,7	-0,1
D	1	0	0	0

Recordemos que la ecuación fundamental de Gauss-Seidel viene dada por:

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ \left( \frac{S_i}{V_i} \right)^* - \sum_{j=1}^{n, j \neq i} Y_{ij} V_j \right]$$

y para las barras PV necesitamos calcular  $Q_i$  dado por:

$$Q_i = \text{Im} \left\{ V_i \sum_{j=1}^n (Y_{ij} V_j)^* \right\}$$

Así para la barra B se tiene:

$$Q_b = \text{Im} \{1,02 \cdot (5j \cdot 1,03 - 10j \cdot 1,02 + 0 \cdot 1 + 5j \cdot 1)^*\} = 0,051$$

y luego:

$$V_b = \frac{1}{-10j} \left( \left( \frac{0,7 + 0,051j}{1,02} \right)^* - (5j \cdot 1,03 + 0 \cdot 1 + 5j \cdot 1) \right) = 1,0223 \angle 3,849^\circ \leftarrow \text{solo guardo } \theta$$

Para C:

$$V_c = \frac{1}{-10j} \left( \left( \frac{-0,7 - 0,1j}{1} \right)^* - 10j \cdot 1 \right) = 0,9925 \angle -4,044^\circ$$

Para D:

$$V_d = \frac{1}{-25j} (0 - (4j \cdot 1,03 + 5j \cdot 1,02 \angle 3,849^\circ + 10j \cdot 0,9925 \angle -4,044^\circ)) = 0,7645 \angle -1,072^\circ$$

2a iteración	V	$\theta$	$P_n$	$Q_n$
A	1,03	0		
B	1,02	3,849°	0,7	?
C	0,9925	-4,044	-0,7	-0,1
D	0,7645	-1,072	0	0

Para B:

$$Q_b = \text{Im} \{ (1,02 \angle 3,849^\circ) \cdot (5j \cdot 1,03 - 10j \cdot (1,02 \angle 3,849^\circ) + 5j \cdot (0,7645 \angle -1,072^\circ)^* ) \} = 1,278$$

Luego:

$$V_b = \frac{1}{-10j} \left( \left( \frac{0,7 + 1,278j}{1,02 \angle 3,849^\circ} \right)^* - (5j \cdot 1,03 + 5j \cdot (0,7645 \angle -1,072^\circ)) \right) = 1,0199 \angle 3,92^\circ \leftarrow \text{solo guardo } \theta$$

Para C:

$$V_c = \frac{1}{-10j} \left( \left( \frac{-0,7 - 0,1j}{0,9925 \angle -4,044^\circ} \right)^* - 10j \cdot (0,7645 \angle -1,072^\circ) \right) = 0,754 \angle -6,392^\circ$$

Para D:

$$V_d = \frac{1}{-25j} (0 - (4j \cdot 1,03 + 5j \cdot (1,02 \angle 3,92^\circ) + 10j \cdot 0,754 \angle -6,392^\circ)) = 0,6683 \angle -1,686^\circ$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} S_{neta}^a &= V_a I_a^* \\ &= V_a \left( \sum_{j=1}^4 Y_{1j} V_j \right)^* \\ &= 1,03 (-9j \cdot 1,03 + 5j \cdot (1,02 \angle 3,92^\circ) + 4j \cdot (0,6683 \angle -1,686^\circ))^* \\ &= -0,278 + 1,555j = S_{gen}^a - S_{cons}^a \end{aligned}$$

Por tanto:

$$S_{gen}^a = S_{neta}^a + S_{cons}^a = -0,278 + 1,555j + 0,2 + 0,05j = -0,0781 + 1,605j$$

**Problema 2.**

Considere el ejemplo 9.2 y 9.3 del libro Power Systems Analysis, J.J. Grainger, W.D. Stevenson, McGraw-Hill, © 1994, dado por el siguiente diagrama unilineal:

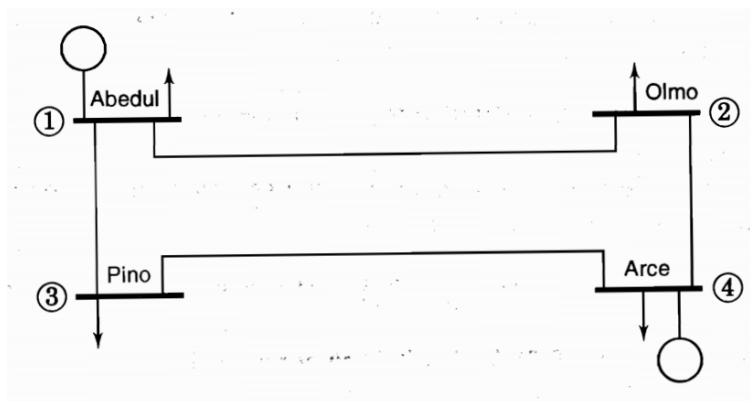


Figura 1: Diagrama unilineal del problema.

Con una matriz de admitancia dada por:

**TABLA 9.4**  
**Matriz de admitancias de barra para el ejemplo 9.2†**

No. de barra	①	②	③	④
①	8.985190 -j44.835953	-3.815629 +j19.078144	-5.169561 +j25.847809	0
②	-3.815629 +j19.078144	8.985190 -j44.835953	0	-5.169561 +j25.847809
③	-5.169561 +j25.847809	0	8.193267 -j40.863838	-3.023705 +j15.118528
④	0	-5.169561 +j25.847809	-3.023705 +j15.118528	8.193267 -j40.863838

† Valores en por unidad redondeados a seis lugares decimales

y los siguientes datos:

**TABLA 9.3**  
**Datos de barras para el ejemplo 9.2**

Barra	Generación		Carga		$V_i$ , por unidad	Observaciones
	$P$ , MW	$Q$ , Mvar	$P$ , MW	$Q$ , Mvar†		
1	—	—	50	30.99	1.00 0°	Barra de compensación
2	0	0	170	105.35	1.00 0°	Barra de carga (inductiva)
3	0	0	200	123.94	1.00 0°	Barra de carga (inductiva)
4	318	—	80	49.58	1.02 0°	Voltaje controlado

† Los valores  $Q$  de la carga se calculan de los correspondientes valores de  $P$  suponiendo un factor de potencia de 0.85

En el ejemplo se resuelve el sistema de la forma como se hace en el Problema 1 de esta ayudantía. Donde se obtiene como resultado de la primera iteración:

$$V_2^{(1)} = 0.983564 - j0.032316$$

En el ejemplo se utiliza un factor de aceleración  $\alpha = 1.6$ , y recordando que la fórmula viene dada por:

$$V_{i,ac}^{(k)} = V_{i,ac}^{(k-1)} + \alpha(V_i^{(k)} - V_{i,ac}^{(k-1)})$$

siempre que el  $V_{i,ac}^{(k-1)}$  exista, sino usar el no acelerado. De esta forma se obtiene:

$$V_{2,ac}^{(1)} = 1 + 1.6(0.983564 - j0.032316 - 1) = 0.973703 - j0.051706$$

un cálculo similar entrega:

$$V_{3,ac}^{(1)} = 0.953949 - j0.066708$$

Dado que la cuarta barra es una barra PV, debe calcularse Q usando la fórmula:

$$Q_i = \text{Im} \left\{ V_i \sum_{j=1}^n (Y_{ij} V_j)^* \right\} = -\text{Im} \left\{ V_i^* \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \right\}$$

Al resolver se tiene:

$$Q_4^{(1)} = 1.654151 \text{ pu (base 100 MVA)}$$

y con esto se puede usar la fórmula para obtener:

$$V_4^{(1)} = 1.017874 - j0.010604 = 1.017929 \angle -0.59687^\circ$$

como el voltaje esta fijo en 1.2, solo se guarda el ángulo, es decir:

$$V_4^{(1)} = 1.2 \angle -0.59687^\circ = 1.019945 - j0.010625$$

Lo que se pide resolver en este problema es lo siguiente:

- Suponga ahora que el generador conectado a la barra 4 tiene un límite de 125 MVar. Recalcule la primera iteración para el voltaje en la barra 4 usando el método de Gauss-Seidel.
- Resuelva una segunda iteración. Asuma un factor de aceleración de 1.6. Olvide la restricción de la parte (a).

### Solución:

- Como se vio, la potencia reactiva calculada venía dada por:

$$Q_4^{(1)} = 1.654151 = 165.4151 \text{ MVar}$$

Considerando además que en la barra hay un consumo de 49.58 MVar, entonces la generación que se requiere viene dada por:  $Q_{4,gen} = 165.4151 + 49.58 = 214.9951$  que supera con creces los 125 MVar límites del generador. De esta forma la barra pasa a ser una barra PQ, con una potencia neta de:

$$Q_4^{(1)} = 1.25 - 0.4958 = 0.7521$$

Así:

$$\begin{aligned} V_4^{(1)} &= \frac{1}{Y_{44}} \left[ \left( \frac{S_4}{V_4^{(0)}} \right)^* - (Y_{42} V_{2,ac}^{(1)} + Y_{43} V_{3,ac}^{(1)}) \right] \\ &= \frac{1}{8.193267 - j40.863838} \left[ \frac{2.38 - j0.7542}{1.02} - (-5.573064 + j40.05939) \right] \\ &= 0.997117 - j0.006442 \end{aligned}$$

y usando un factor de aceleración de 1.6 se tiene:

$$V_{4,ac}^{(1)} = 1.02 + 1.6(0.997117 - j0.006442 - 1.02) = 0.983387 - j0.0103073$$

- (b) El cálculo queda propuesto al lector, pero es similar a los casos anteriores. Se muestra la solución para  $V_2$ , y luego aplicada la aceleración:

$$\begin{aligned}
 V_2^{(2)} &= \frac{1}{Y_{22}} \left[ \left( \frac{S_2}{V_{2,acc}^{(1)}} \right)^* - (Y_{21}V_1 + Y_{24}V_4^{(1)}) \right] \\
 &= \frac{1}{8.985190 - j44.835953} \left[ \frac{-1.7 + j1.0535}{0.973703 + j0.051706} - \left\{ (-3.815629 + j19.078144) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-5.169561 + j25.847809)(1.019945 - j0.010625) \right\} \right] \\
 &= 0.9810729 - j0.0375853
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 V_{2,ac}^{(2)} &= 0.973703 - j0.051706 + 1.6(0.9810729 - j0.0375853 - (0.973703 - j0.051706)) \\
 &= 0.985495 - j0.0291128
 \end{aligned}$$

**Problema 3. Máquina Síncrona.**

1) Considere el diagrama fasorial de un generador síncrono de rotor cilíndrico conectado a una barra infinita. Deduzca las fórmulas de Potencia Activa y Potencia Reactiva, y analice el impacto de cambiar  $E_g$  (por ejemplo agregando más corriente en el rotor) o cambiar  $\delta$ . Determine cual es la condición para que la máquina opere como generador o motor.

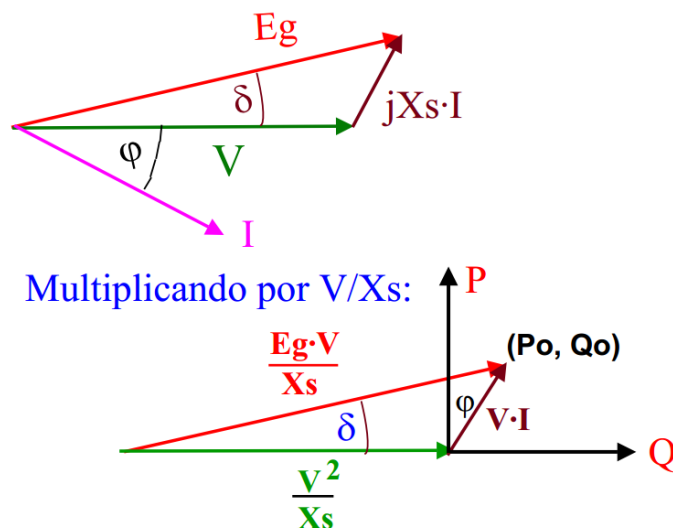


Figura 2: Diagrama fasorial de voltajes y potencias.

2) Considere la siguiente carta de operación de un generador síncrono de rotor cilíndrico conectado a una barra infinita.

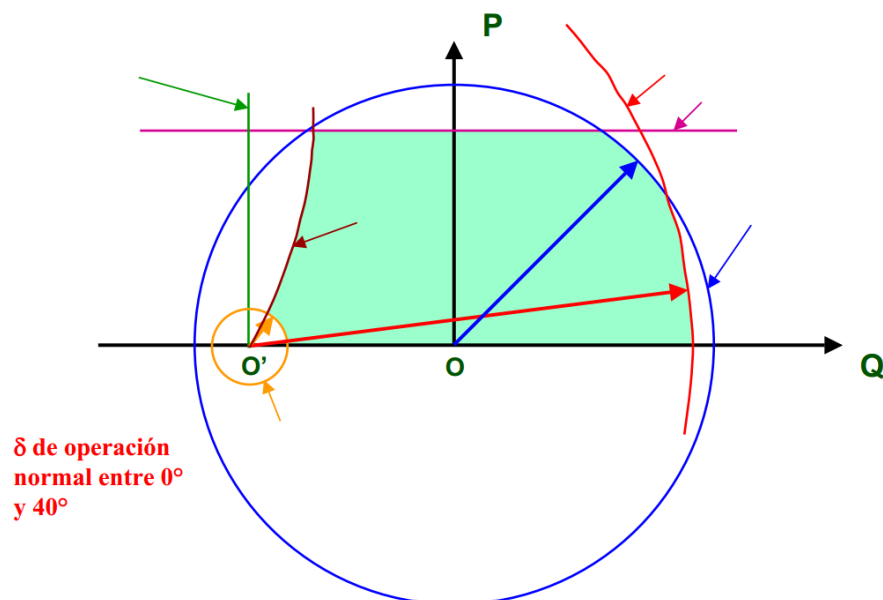


Figura 3: Carta de operación de un generador síncrono de rotor cilíndrico conectado a una barra infinita.

Explique a que corresponde cada uno de los límites.

**Solución:** 1) Para calcular la potencia activa solo basta proyectar el vector  $E_g V / X_s$  al eje de las ordenadas, de esta forma:

$$P = \frac{E_g V}{X_s} \sin \delta$$

Para el caso de la potencia reactiva se proyecta el vector  $E_g V / X_s$  al eje de las abscisas y se resta con el otro vector, de esta forma:

$$Q = \frac{E_g V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s}$$

Lo importante a señalar es que la condición para que la máquina síncrona opere como generador o motor depende exclusivamente del ángulo entre el voltaje inducido por la máquina y el voltaje de la barra infinito. En el caso de que el voltaje inducido  $E_g$  adelante al voltaje  $V$  entonces la máquina está en condición de generador. Afectar la magnitud de  $E_g$  no implica condición de generador o motor. La diferencia en magnitud afecta la potencia reactiva.

2) La solución es la siguiente:

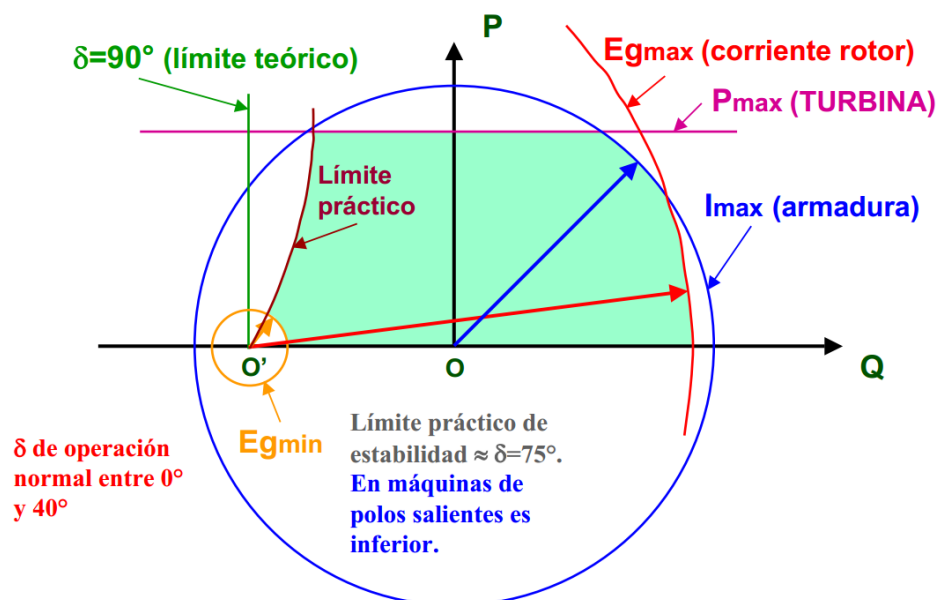


Figura 4: Límites de la carta de operación de un generador síncrono.



**Problema 4. Generador Síncrono conectado a barra infinita.**

Un generador síncrono trifásico de una central térmica, de dos polos, 50 Hz, opera en régimen estacionario entregando 150 MW al sistema eléctrico. El generador opera entregando Q, con factor de potencia 0,9. En estas condiciones, su corriente de línea es de 3.900 A. La reactancia síncrona del generador es de 2,4  $\Omega$ /fase.

- Determine el valor de la tensión en bornes del generador V (fase-neutro) y la potencia reactiva Q total que éste entrega.
- Determine el ángulo de torque  $\delta$  de operación del generador y la tensión de excitación  $E_g$  (fase-neutro).
- Si la tensión inducida del generador  $E_g$ , se disminuye en un 5 %, determine el nuevo ángulo  $\delta$  de operación de la máquina, el nuevo valor de Q y de la corriente de armadura. Asuma que la potencia en la turbina y la tensión V no han variado.

**Solución:**

- La potencia activa total corresponde a:

$$P = 150 \text{ MW} = 3V_{fn}I \cos \varphi = 3 \cdot V_{fn} \cdot 3900 \cdot 0.9$$

despejando se obtiene:

$$V_{fn} = 14.24 \text{ kV}$$

El cálculo de Q se realiza en forma similar:

$$Q = 3V_{fn}I \sin \varphi = 3 \cdot 14.24 \cdot 10^3 \cdot 3900 \cdot \sqrt{1 - 0.9^2} = 72.65 \text{ MVar}$$

- Para encontrar los valores de  $E_g$  y  $\delta$  se utiliza la ecuación del circuito de armadura (estator) del generador:

$$E_g = jX_s I + V = j \cdot 2.4 \cdot 3900 \angle -25.84^\circ + 14.24 \cdot 10^3 \angle 0^\circ = 20.16 \angle 24.68^\circ \text{ kV}$$

por lo tanto  $\delta = 24.68^\circ$ .

- Para encontrar el nuevo valor de  $\delta$  se utilizan la ecuación de potencia activa (que no cambió) del generador síncrono:

$$P_{1\varphi} = \frac{0.95E_g V}{X_s} \sin \delta \rightarrow \delta = 26.08^\circ$$

Para encontrar Q se utiliza la ecuación correspondiente:

$$Q_{3\varphi} = 3 \left( \frac{0.95E_g V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \right) = 52.77 \text{ MVar}$$

Finalmente la corriente I puede obtenerse simplemente de las ecuaciones de potencia:

$$P_{1\varphi} = V_{fn} I \cos \varphi$$

y  $\varphi$  puede obtenerse usando:

$$\tan \varphi = \frac{Q_{3\varphi}}{P_{3\varphi}} = \frac{Q_{1\varphi}}{V_{1\varphi}} \rightarrow \varphi = 19.38^\circ$$

por lo tanto:

$$I = 3720.9 \text{ A}$$