

## Ayudantía 3

Límites de funciones.

**Problema 1.** Calcule los siguientes límites por definición:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 5 = 1$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 4} 7x - 1 = 27$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$

**Solución:**

(a) La definición de un límite de una función  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  esta dada por:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

así lo que consisten estos problemas es encontrar  $\delta$  en función de  $\varepsilon$ . Luego notemos que:

$$|3x - 5 - 1| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon \rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

Luego hemos encontrado que si  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  se cumple lo pedido. Así para este caso tenemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon/3 : 0 < |x - 2| < \varepsilon/3 \Rightarrow |3x - 6| = |3x - 5 - 1| < \varepsilon \quad \square$$

(b) Repitiendo lo anterior:

$$|7x - 1 - 27| = |7x - 28| = 7|x - 4| < \varepsilon \rightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{7} = \delta \quad \square$$

(c) Esto es un poco mas complicado, notemos que:

$$|x^2 - 25| = |x + 5||x - 5| < \varepsilon \rightarrow |x - 5| < \frac{\varepsilon}{|x + 5|} = \delta$$

Hemos encontrado el  $\delta$  pero este no puede depender de  $x$ , lo que hacemos en este caso es considerar que no estamos interesados en que la distancia sea tan grande, sino en distancias pequeñas lo que nos permite fijar una cota para  $|x + 5|$ , así que nos fijamos una distancia arbitraria, digamos que estemos a distancia  $\delta = 1$ . Esto significa que  $0 < |x - 5| < 1$  así que:

$$|x - 5| < 1 \rightarrow -1 < x - 5 < 1 \rightarrow 9 < x + 5 < 11 \rightarrow |x + 5| < 11$$

Esto significa que de la ecuación anterior tenemos:

$$|x - 5| < \frac{\varepsilon}{|x + 5|} < \frac{\varepsilon}{11} = \delta$$

Luego si definimos

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{11} \right\}$$

nos aseguramos de que estamos lo suficientemente cerca tal de estar dentro de la distancia requerida. Así si el  $\varepsilon$  es muy pequeño tomamos  $\varepsilon/11$ , y si  $\varepsilon$  es grande, nos basta con tomar  $\delta = 1$  y nos aseguramos de estar dentro de lo requerido.  $\square$

**Problema 2.** Calcule:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sin(\pi x)}$
- (d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x + h) - \sec(x)}{h}$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2}$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x) \sin(\beta x)}{x \sin(\gamma x)}$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x - 1)}{x^3 + x - 2}$
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(3 + \cos(1/x^2)) \sin x}$
- (j)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}$  con  $m, p \in \mathbb{N}$ .

**Solución:**

(a) De Trigonometría se sabe que:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \rightarrow 2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

Así realizando el cambio en nuestro problema tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2(x)}}{x} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

Analizando límites laterales claramente el límite no existe pues:

$$\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \sqrt{2} \neq \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$$

□

(b) Factorizando y arreglando tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - 1) - 2(x - 1)}{(x^{50} - 1) - 2(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{99} + x^{98} + \dots + 1) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x^{49} + x^{48} + \dots + 1) - 2(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \dots + 1 - 2}{x^{49} + x^{48} + \dots + 1 - 2} \\ &= \frac{100 - 2}{50 - 2} \\ &= \frac{49}{24} \end{aligned}$$

□

(c) Hacemos el cambio de variable  $u = \pi(x - 4)$  con lo que nos queda lo pedido de forma inmediata:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sin(\pi x)} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u/\pi}{\sin(u + 4\pi)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\pi \sin(u)} \\ &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

□

(d) Me ahorraré escribir  $\lim_{h \rightarrow 0}$  para hacerlo más rápido. Antes es necesario recordar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

Ahora empezando el problema tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\sec(x + h) - \sec(x)}{h} &= \frac{1/\cos(x + h) - 1/\cos(x)}{h} \\ &= \frac{\cos(x) - \cos(x + h)}{h \cos(x + h) \cos(x)}\end{aligned}$$

Recordando nuestra identidad con  $\alpha = x + \frac{h}{2}$  y  $\beta = \frac{h}{2}$  tenemos:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \cos(x) - \cos(x + h)$$

Por lo que podemos aplicar la identidad obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{\sec(x + h) - \sec(x)}{h} &= \frac{2 \sin(x + h/2) \sin(h/2)}{h \cos(x) \cos(x + h)} \\ &= \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \frac{\sin(x + h/2)}{\cos(x) \cos(x + h)}\end{aligned}$$

Ahora al hacer  $h \rightarrow 0$  tenemos lo siguiente:

$$\underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x + h/2)}{\cos(x) \cos(x + h)}}_{\rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x + h) - \sec(x)}{h} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

□

(e) Pongamos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \cdot 1 = 1$$

Donde se usó que  $u = x - x^2$ , que tiende a 0 cuando  $x$  tiende a 0.

□

(f) Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x) \sin(\beta x)}{x \sin(\gamma x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\sin(\beta x)}{\beta x} \cdot \frac{\gamma x}{\sin(\gamma x)} \cdot \frac{\alpha \beta}{\gamma} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha \beta}{\gamma} = \frac{\alpha \beta}{\gamma}$$

□

(g) Notemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)} \left( \frac{1}{(x-1)(x^2+x+2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \left( \frac{1}{\cos(x-1)(x^2+x+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

□

(h) Notamos que:

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

Ahora si  $x > 0$  tenemos:

$$\underbrace{1-x}_{\rightarrow 1} \leq x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

Ahora si  $x < 0$  tenemos:

$$\underbrace{1-x}_{\rightarrow 1} \geq x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$$

Así por teorema del sandwich en ambos casos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

□

(i) Notemos que:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} \leq \frac{1}{3+\cos(1/x^2)} \leq \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x^2}{4}}_{\rightarrow 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3+\cos(1/x^2)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\rightarrow 0}$$

Así:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(3+\cos(1/x^2)) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3+\cos(1/x^2)} \cdot \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

(j) En primer lugar calculemos  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}{x - a}$ . Recordar (o aprender) que para  $y, z \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$y^p - z^p = (y - z)(y^{p-1} + y^{p-2}z + y^{p-3}z^2 + \dots + yz^{p-2} + z^{p-1}).$$

Luego tomamos  $y = \sqrt[p]{x}$  y  $z = \sqrt[p]{a}$ , y tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}{x - a} &= \frac{x - a}{(x - a)((\sqrt[p]{x})^{p-1} + (\sqrt[p]{x})^{p-2}\sqrt[p]{a} + \dots + \sqrt[p]{x}(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[p]{x})^{p-1} + (\sqrt[p]{x})^{p-2}\sqrt[p]{a} + \dots + \sqrt[p]{x}(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}}\end{aligned}$$

Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt[p]{x})^{p-1} = \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt[p]{x})^{p-2}\sqrt[p]{a} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{x}(\sqrt[p]{a})^{p-2} = (\sqrt[p]{a})^{p-1},$$

luego por álgebra de límites se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}{x - a} = \frac{1}{p(\sqrt[p]{a})^{p-1}} = \frac{a^{\frac{1-p}{p}}}{p}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}{x - a}}{\frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}} \\ &= \frac{\frac{1-p}{a^{\frac{1-p}{p}}}}{\frac{1-m}{a^{\frac{1-m}{m}}}} \\ &= \frac{p}{m} a^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)}\end{aligned}$$

□

**Problema 3.** Determine  $k \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - kx + k^2 + k - 6}{x^2 + x} = 3$$

Justifique claramente su respuesta

**Solución:** Notemos que

$$\frac{x^2 - kx + k^2 + k - 6}{x^2 + x} = \frac{x^2 - kx}{x^2 + x} + \frac{k^2 + k - 6}{x^2 + x} = \frac{x^2 - kx}{x^2 + x} + \frac{(k+3)(k-2)}{x^2 + x}$$

Ahora como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - kx}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-k)}{x(x+1)} = -k$$

Entonces para que converja es necesario que  $\frac{(k+3)(k-2)}{x^2+x}$  converja. Pero como  $(x^2+x)^{-1}$  no converge, entonces el numerador debe ser 0. Esto es posible con  $k = -3$  o  $k = 2$ . Eligiendo  $k = -3$  tenemos que finalmente el límite pedido es 3.

□