

MAT1610-6 Cálculo I - 2do Semestre 2011

Profesor: Gloria Schwarze Dinstrans

Ayudante: Rodrigo Henríquez Auba

## Ayudantía 4

Límites y Continuidad.

**Problema 1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin(x) & \text{si } x < \frac{-\pi}{2}, \\ a \sin x + b & \text{si } \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3 \cos^2(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Determine  $a$  y  $b$  de modo que  $f$  sea continua en  $\mathbb{R}$ .

**Solución:** Tenemos que es continua en los intervalos  $(-\infty, -\pi/2)$ ,  $(-\pi/2, \pi/2)$  y  $(\pi/2, \infty)$  pues se trata de producto y/o suma de funciones continuas (senos y cosenos son continuos). Por lo tanto solo resta analizar los puntos  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ , pues desconocemos como se comporta la función al pasar por ellos.

Recordemos que una función  $f$  se dice continua en  $x_0 \in \text{Dom}(f)$  si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

En  $x = -\pi/2$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} -2 \sin(x) = -2 \sin(-\pi/2) = 2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} a \sin(x) + b = a \sin(-\pi/2) + b = b - a = f(-\pi/2)$$

Por lo tanto para la continuidad en este punto necesitamos que

$$b - a = 2 \tag{1.1}$$

Análogamente en  $x = \pi/2$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} a \sin(x) + b = a \sin(\pi/2) + b = a + b = f(\pi/2)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 3 \cos^2(x) = 3 \cos^2(\pi/2) = 0$$

así que para la continuidad en este punto es necesario que

$$a + b = 0 \tag{1.2}$$

de (1.1) y (1.2) se sigue que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  si y sólo si  $a = -1$  y  $b = 1$  (se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones).

□

**Problema 2.** Pruebe que existe  $x \in \mathbb{R}$  que satisface la ecuación  $x = \cos(x)$ .

**Solución:** Sea

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \cos(x)\end{aligned}$$

Notemos que  $\varphi$  es continua pues es suma de funciones continuas. Además  $\varphi(0) = -1 < 0$  y  $\varphi(2) = 2 - \cos(2) > 0$ . Por TVI se tiene que existe  $x_0 \in (0, 2)$  tal que  $\varphi(x_0) = 0$ . Este  $x_0$  satisface la ecuación dada. □

**Problema 3.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(0) = f(1)$ . Pruebe que existe  $c \in [0, 1]$  tal que  $f(c) = f(c + 1/2)$ .

**Solución:** Sea

$$\begin{aligned}\psi : [0, 1/2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(x + 1/2)\end{aligned}$$

La continuidad de  $f$  en  $[0, 1]$  implica la continuidad de  $\psi$  en  $[0, 1/2]$ . Notemos que

$$\psi(0) + \psi(1/2) = f(0) - f(1/2) + f(1/2) - f(1) = f(0) - f(1) = 0.$$

Distinguimos dos casos:

- Si  $\psi(0) = \psi(1/2) = 0$  entonces 0 y 1/2 son puntos que satisfacen la condición pedida.
- Si  $\psi(0) < \psi(1/2)$  (o  $\psi(1/2) < \psi(0)$ ) entonces uno es negativo y el otro positivo pues suman cero. En cualquier caso podemos concluir por TVI que existe  $c \in (0, 1/2)$  tal que  $\psi(c) = 0$ . Este  $c$  satisface la condición pedida. □

**Problema 4.**

- (a) Sea  $f : ]-a, a[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$ . Muestre que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$ .
- (b) Pruebe que si  $f$  es una función acotada sobre  $[0, 1]$  que verifica  $f(ax) = bf(x)$  para  $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$  y  $a, b > 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ .
- (c) Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[P(x)]}{P([x])}$ , donde  $P$  es un polinomio de orden  $n \geq 1$  con coeficientes estrictamente positivos.

**Solución:**

- (a) Como la función es positiva es claro que  $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$ . Luego por hipótesis dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \epsilon \quad \text{para} \quad 0 < |x| < \delta.$$

Esta condición se puede reescribir de la siguiente manera

$$0 \leq (f(x) - 1) - \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \epsilon \quad (4.1)$$

y también como

$$0 \leq (f(x) - 1) \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \epsilon \quad (4.2)$$

La expresión (4.1) al cuadrado más dos veces la expresión (4.2) da como resultado

$$(f(x) - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right)^2 < \epsilon^2 + 2\epsilon$$

y en consecuencia

$$|f(x) - 1|^2 < \epsilon^2 + 2\epsilon.$$

□

- (b) Sea  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$  para  $x \in [0, 1]$  (la función es acotada). Como  $f(ax) = bf(x)$  para  $x \in [0, \frac{1}{a}]$ , se tiene que  $f(a^2x) = b^2f(x)$  para  $x \in [0, \frac{1}{a^2}]$  (pues  $ax$  debe estar en  $[0, \frac{1}{a}]$ ). Se puede mostrar por recurrencia que

$$f(a^n x) = b^n f(x) \quad \text{para } x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

de donde obtenemos

$$|f(x)| < \frac{M}{b^n} \quad \text{para } x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Esto muestra que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  y la ecuación  $f(ax) = bf(x)$  implica que  $f(0) = 0$ .

□

- (c) Como  $P$  es un polinomio de coeficientes estrictamente positivos, se obtiene para  $x > 1$  que

$$\frac{P(x) - 1}{P(x)} \leq \frac{[P(x)]}{P([x])} \leq \frac{P(x)}{P(x-1)}.$$

De donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[P(x)]}{P([x])} = 1.$$

□

**Problema 5.** Sea  $\beta \in \mathbb{R}$ . Suponga que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{x^\beta} = g(a)$  para todo  $a \in \mathbb{R}^+$ . Probar que existe  $c$  tal que  $g(a) = ca^\beta$ .

**Solución:** Notar que

$$\frac{g(a)}{a^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{a^\beta x^\beta} \stackrel{t=ax}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^\beta} = g(1).$$

□

**Problema 6.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ . Probar que para todo  $c > 0$  se tiene  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ . **Indicación:** Comience probando el resultado para  $c = 2^n$ .

**Solución:** Notar que para  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1} x)} \frac{f(2^{n-1} x)}{f(2^{n-2} x)} \cdots \frac{f(2x)}{f(x)} \right) = 1.$$

Supongamos que  $f$  es creciente (el caso en que es decreciente es análogo) y  $c \geq 1$ . Claramente existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $2^n \leq c < 2^{n+1}$  y como  $f$  es creciente tenemos que  $f(2^n x) \leq f(cx) \leq f(2^{n+1} x)$ , de donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1 \quad \text{para } c \geq 1.$$

Para  $0 < c < 1$  se tiene entonces que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{f\left(\frac{t}{c}\right)} = 1.$$

□