

MAT1610-6 Cálculo I - 2do Semestre 2011

Profesor: Gloria Schwarze Dinstrans

Ayudante: Rodrigo Henríquez Auba

Ayudantía 11

Técnicas de Integración

Recordatorio: Identidades:

- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
- $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
- $\csc(x) = \frac{1}{\sec(x)}$
- $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$
- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Derivadas:

- $(\sec(x))' = \sec(x) \tan(x)$
- $(\tan(x))' = \sec^2(x)$
- $(\csc(x))' = -\csc(x) \cot(x)$
- $(\cot(x))' = -\csc^2(x)$

Lo anterior implica las siguientes integrales:

- $\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + C$
- $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
- $-\int \csc(x) \cot(x) dx = \csc(x) + C$
- $-\int \csc^2(x) dx = \cot(x) + C$
- $\int \sec(x) dx = \ln(\sec(x) + \tan(x)) + C$
- $\int \csc(x) dx = -\ln(\csc(x) + \cot(x)) + C$

Sustitución de Weierstrass: Se entiende como sustitución de Weierstrass lo siguiente:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Luego para $-\pi < x < \pi$, y usando que:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sabiendo que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ y que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ se obtiene:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}$$

Luego:

$$u^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Usando Pitágoras obtenemos:

$$\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$$

Luego como $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y como $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ se tiene que:

$$dx = \frac{2du}{1 + u^2}$$

Esto finalmente nos permite transformar funciones racionales trigonométricas en funciones racionales ordinarias. Así por ejemplo calcule $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$, para esto usamos a Weierstrass

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{2du}{(1 + u^2) \left(\frac{2u}{1 + u^2} + \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \right)} \\ &= 2 \int \frac{du}{-u^2 + 2u + 1} \\ &= 2 \int \frac{du}{\underbrace{2 - (u - 1)^2}_{t = u - 1 \Rightarrow dt = du}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{2 - t^2} \end{aligned}$$

Así en resumen: $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

- $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$
- $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$
- $dx = \frac{2du}{1 + u^2}$

Problema 1. Calcule usando técnicas apropiadas:

(a) $\int_0^2 \sqrt[5]{t^4 - t^2} (10t^3 - 5t) dt$

Solución: Ponemos $u = t^4 - t^2 \rightarrow du = 4t^3 - 2t dt$ y entonces $\frac{5}{2} du = 10t^3 - 5t dt$ y además cambiando los límites de integración notando que si $t = 0 \rightarrow u = 0^4 - 0^2 = 0$ y si $t = 2 \rightarrow u = 2^4 - 2^2 = 12$ con lo que nos queda:

$$\int_0^{12} u^{1/5} \frac{5}{2} du = \frac{5}{2} \cdot \frac{u^{6/5}}{6/5} \Big|_0^{12} = \frac{25}{12} \cdot 12^{6/5} = 25 \cdot \sqrt[5]{12}$$

□

(b) $\int \sec x dx$

Solución: Multiplicando por $\sec x + \tan x$ arriba y abajo nos queda:

$$I = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

Ponemos $u = \sec x + \tan x \rightarrow du = \sec x \tan x + \sec^2 x$ con lo que nos queda:

$$I = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

□

(c) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

Solución: Usaremos fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x - a}$$

Lo que implica:

$$1 = A(x - a) + B(x + a) = x(A + B) + (aB - aA)$$

Lo que genera el sistema

$$A + B = 0 \quad \wedge \quad aB - aA = 1$$

que si resolvemos nos entrega:

$$A = \frac{-1}{2a} \quad \wedge \quad B = \frac{1}{2a}$$

Por lo que en la integral:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{-1}{2a(x + a)} + \frac{1}{2a(x - a)} = \frac{1}{2a} (-\ln |x + a| + \ln |x - a|) + C$$

□

(d) $\int x \arcsin x dx$

Solución: Integrando por partes pongamos $u = \arcsin x$ y $dv = xdx$, por lo que tenemos $du = dx/\sqrt{1-x^2}$ y $v = x^2/2$, con lo que:

$$I = \int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Para la integral que queda pongamos $x = \sin \theta \rightarrow dx = \cos \theta d\theta$ con lo que la segunda integral queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \end{aligned}$$

Para volver el cambio es fácil notar que si $x = \sin \theta \rightarrow \theta = \arcsin x$ y por otro lado como $x = \sin \theta \rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos \theta$. Así devolviendo todos los cambios tenemos:

$$I = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

□

(e) Utilice 2 métodos para calcular: $\int \frac{dx}{1-x^2}$

Solución: El primer método consiste en usar fracciones parciales. Así:

$$I = \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2} (\ln|1+x| - \ln|1-x|) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$$

El segundo método consiste en usar sustitución trigonométrica:

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \\ \Rightarrow dx &= \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \int \frac{\cos \theta d\theta}{1-\sin^2 \theta} \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \end{aligned}$$

Dado que $x = \sin \theta \rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos \theta$, así:

$$\sec \theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \ln(\sec \theta + \tan \theta) + C \\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C = \ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C \\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C
\end{aligned}$$

□

(f) $\int \ln(1+x^2) dx$

Solución: Integrando por partes se tiene

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

Para la última integral se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= x - \arctan x
\end{aligned}$$

Así

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2x - 2 \arctan(x) + C$$

□

(g) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

Solución: La idea en estos casos es completar un cuadrado en el denominador para luego emplear una sustitución trigonométrica. En este caso la primitiva se escribe como

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx$$

Usamos el cambio $x+1 = 2 \sin(t)$ con $dx = 2 \cos(t) dt$. Se obtiene

$$\int \frac{4 \sin(t) - 3}{2 \cos(t)} 2 \cos(t) dt = \int (4 \sin(t) - 3) dt = -4 \cos(t) - 3t = -2 \sqrt{4 - (1+x)^2} - 3 \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

□

(h) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$

Solución: Se trata de una función racional así que se empleará el método de fracciones parciales. Escribimos

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{A+x(E+C)+x^2(2A+B+D)+x^3C+x^4(A+B)}{x(x^2+1)^2}$$

Luego $1-x+2x^2-x^3 = A+x(E+C)+x^2(2A+B+D)+x^3C+x^4(A+B)$. Ahora igualamos los coeficientes de ambos polinomios respectivamente. Con esto:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ E+C &= -1 \\ 2A+B+D &= 2 \\ C &= -1 \\ A+B &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $A=1, B=-1, C=-1, D=1, E=0$. Así se tiene

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x+1}{(x^2+1)} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

Se tiene que

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2+1)} dx + \int \frac{1}{(x^2+1)} dx = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \arctan(x)$$

y

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

Finalmente

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \arctan(x) - \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

□

Problema 2. Sea $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 . Calcule $f(0)$ sabiendo que $f(\pi) = 2$ y que

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin(x) dx = 5.$$

Solución: Por un lado integrando por partes se obtiene

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx = -\cos(x)f(x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos(x) dx.$$

Por otro lado también se tiene

$$\int_0^\pi f''(x) \sin(x) dx = \sin(x)f'(x)|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos(x) dx.$$

Sumando ambas integrales se concluye que

$$f(\pi) + f(0) = 5.$$

Así que $f(0) = 3$.

□