

Ayudantía 1

Axioma del Supremo y Límites de sucesiones.

Problema 1. Sean A, B dos conjuntos no vacíos y acotados superiormente tales que $A \subseteq B$. Pruebe que $\sup A \leq \sup B$.

Solución: Al ser acotados superiormente existirá el supremo de ambos conjuntos por Axioma del Supremo. Tenemos entonces por definición de supremo que $\sup B \geq b, \forall b \in B$. Por otro lado si $a \in A \Rightarrow a \in B$ pues $A \subseteq B$ y por lo tanto $\sup B \geq a, \forall a \in A$. Es decir $\sup B$ es una cota superior de A y como el supremo de A es la menor de las cotas superiores entonces se tiene $\sup A \leq \sup B$. \square

Problema 2. Sea $A = \left\{ \frac{|\sin n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, demuestre que $\inf A = 0$

Solución: Para demostrar que un número es el ínfimo de un conjunto debemos probar que es la mayor de las cotas inferiores de tal conjunto.

Primero probaremos que 0 es cota inferior, lo cual es simple pues basta notar que $|\sin n| \geq 0$ y $n > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ (división de 2 terminos no negativos).

Ahora solo basta mostrar que 0 es la mayor de las cotas inferiores. Lo haremos por contradicción: para esto supongamos que $\varepsilon > 0$ es una cota inferior de A . Si ε es cota inferior de A , entonces es menor o igual que cada elemento de A , sin embargo por la propiedad arquimediana existe un natural n_0 que satisface $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ o equivalentemente:

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Pero además $|\sin n_0| \leq 1$ y por lo tanto:

$$\frac{|\sin n_0|}{n_0} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|\sin n_0|}{n_0} < \varepsilon$$

Entonces como $\frac{|\sin n_0|}{n_0} \in A$ y es menor que ε hemos llegado a una contradicción, pues supusimos que ε era cota inferior de A .

Así todo número un “poco” mayor que 0 deja de ser cota inferior de A y por lo tanto 0 es el ínfimo. \square

Problema 3. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n = \frac{2n+3}{3n+2}$.

(a) Encuentre intuitivamente un número real l tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

(b) Determine el menor natural n_0 tal que $\forall n > n_0$ se tenga que

$$|a_n - l| < 0,001$$

(c) Demuestre por definición que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \cdot \frac{1}{n}}{(3n+2) \cdot \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \overbrace{3/n}^{\rightarrow 0}}{3 + \underbrace{2/n}_{\rightarrow 0}} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Es importante tener presente que detrás de este procedimiento están las propiedades del álgebra de límites (suma, multiplicación, etc...) y por lo tanto cada uno de los límites involucrados debe existir individualmente.

(b) Debemos determinar n_0 tal que $|a_n - l| < 0,001$ siempre que $n > n_0$. En el fondo queremos que:

$$|a_n - l| = \left| \frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{5}{9n+6} < 0,001$$

Despejando para n se tiene:

$$\frac{4994}{9} < n$$

Por lo tanto el n_0 buscado es tal que: $\left\lceil \frac{4994}{9} \right\rceil = 554$

□

(c) Lo que buscamos es un n_0 que dependa de $\varepsilon > 0$ dado y que nos asegure que siempre que $n > n_0$ se cumpla que $|a_n - l| < \varepsilon$. Entonces forzamos la desigualdad y despejamos n con el fin de obtener algo de la forma $n_0(\varepsilon) < n$. Así por la segunda parte sabemos:

$$|a_n - l| = \frac{5}{9n+6} < \varepsilon$$

Despejando n :

$$\frac{5}{9\varepsilon} - \frac{2}{3} < n$$

Pero necesitamos que n_0 sea natural, por lo que tomamos la parte entera y obtenemos:

$$n_0 = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{2}{3} \right\rceil$$

Una vez encontrado n_0 la demostración concluye pues hemos demostrado que para todo $n > n_0$ se cumplirá que $|a_n - l| < \varepsilon$

□

Problema 4. Considere la sucesión definida por recurrencia $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ ($n \geq 0$). Pruebe que es convergente y calcule su límite.

Solución: A menudo nos topamos con que este tipo de sucesiones definidas por recurrencia son monótonas y acotadas. Si tenemos esto, existe un teorema que garantiza la convergencia de la sucesión. Primero intentemos probar que la sucesión es monótona.

Notemos que

$$0 < a_0 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_1$$

así que intentaremos probar que la sucesión es creciente. Usemos el método de inducción. Entonces supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$(HI) : \quad 0 < a_k \leq a_{k+1}.$$

Multiplicamos la desigualdad anterior por 2 y aplicamos raíz (no hay problema pues se trata de términos positivos). Así obtenemos

$$0 < a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \leq \sqrt{2a_{k+1}} = a_{k+2}$$

esto prueba que la sucesión es creciente.

Ahora necesitamos encontrar una cota superior para la sucesión. Recién probamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es válido que

$$0 < a_n \leq \sqrt{2a_n} = a_{n+1}.$$

Si en la desigualdad anterior elevamos al cuadrado y simplificamos por $a_n > 0$ obtenemos que

$$a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto prueba que 2 es cota superior de la sucesión.

Puesto que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente se concluye que es convergente. Ahora que sabemos que el límite existe estamos en condiciones de calcularlo. Sea L el límite de la sucesión, por la definición de convergencia sabemos que existe un natural n para el cual los números a_n , a_{n+1} y L son muy parecidos (tan parecidos como se quiera), así que podemos tomar la ecuación que define a la sucesión

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

y luego trabajamos con

$$L = \sqrt{2L}.$$

Las soluciones de esta ecuación son $L = 0$ y $L = 2$. Como el límite es único solo nos sirve una y escogemos $L = 2$ pues la sucesión es creciente y posee términos mayores que 0. □

Problema 5. Encuentre el límite de la sucesión $a_n = \frac{\cos n}{n}$ y luego demuestre el límite por definición.

Solución: Claramente tenemos por la desigualdad del coseno:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Luego al hacer $n \rightarrow \infty$ es claro que por el teorema del sandwich el límite es 0. Para probarlo por definición necesitamos encontrar el n_0 , para ello solo basta notar que:

$$\left| \frac{\cos n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Luego solo basta tomar $n > n_0 = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ y tendremos que $|\frac{\cos n}{n} - 0| < \varepsilon$. □